# De Taylor-polynoom en de schatting voor het verschil met de originele functie.

September 9, 2003

**Hulpstelling 1** *Als de functie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $n+1$ *maal differentieerbaar is, en zodanig is dat er twee getallen* min *en* Max *zijn met*

$$\min \leq f^{(n+1)}(x) \leq \text{Max} \quad \textit{voor } 0 \leq x \leq R \tag{1}$$

*dan geldt voor* $0 \leq x \leq R$ :

$$\frac{\min}{(n+1)!} x^{n+1} \leq f(x) - \left( f(0) + x f'(0) + \cdots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0) \right) \leq \frac{\text{Max}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

*Met* $f^{(k)}(x)$ *wordt de* $k$*-de afgeleide van* $f$ *in* $x$ *genoteerd.*

De functie

$$g(x) = f(0) + x f'(0) + \cdots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0)$$

heet de *Taylor-polynoom* voor $f$ rond 0 van graad $n$. De polynoom $g(x)$ is de enige polynoom van graad kleiner of gelijk aan $n$ waarvoor geldt

$$g^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) \text{ voor alle } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

**Bewijs.** We weten dat

$$\int_0^x f'(s_1)\, ds_1 = f(x) - f(0)$$

en dit kunnen we herschrijven tot

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s_1)\, ds_1. \tag{2}$$

Deze formule is ook weer te gebruiken voor $f'$, namelijk

$$f'(s_1) = f'(0) + \int_0^{s_1} f''(s_2)\, ds_2,$$

en er volgt dat

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x \left( f'(0) + \int_0^{s_1} f''(s_2)\, ds_2 \right) ds_1 \\
&= f(0) + \int_0^x f'(0)\, ds_1 + \int_0^x \int_0^{s_1} f''(s_2)\, ds_2 ds_1 \\
&= f(0) + x\ f'(0) + \int_0^x \int_0^{s_1} f''(s_2)\, ds_2 ds_1. \qquad (3)
\end{aligned}$$

En formule (2) is ook weer te gebruiken voor $f''$, namelijk

$$f''(s_2) = f''(0) + \int_0^{s_2} f'''(s_3)\, ds_3$$

en er volgt dat

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + x\ f'(0) + \int_0^x \int_0^{s_1} f''(s_2)\, ds_2 ds_1 \\
&= f(0) + x\ f'(0) + \int_0^x \int_0^{s_1} \left( f''(0) + \int_0^{s_2} f'''(s_3)\, ds_3 \right) ds_2 ds_1 \\
&= f(0) + x\ f'(0) + \int_0^x \int_0^{s_1} f''(0)\, ds_2 ds_1 + \int_0^x \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} f'''(s_3)\, ds_3 ds_2 ds_1 \\
&= f(0) + x\ f'(0) + \int_0^x s_1\ f''(0)\, ds_1 + \int_0^x \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} f'''(s_3)\, ds_3 ds_2 ds_1 \\
&= f(0) + x\ f'(0) + \frac{1}{2}x^2\ f''(0) + \int_0^x \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} f'''(s_3)\, ds_3 ds_2 ds_1. \qquad (4)
\end{aligned}$$

En voor degenen die het patroon nog niet herkend hebben:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + x\ f'(0) + \frac{1}{2}x^2\ f''(0) + \int_0^x \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} f'''(0)\, ds_3 ds_2 ds_1 + \int_0^x \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \int_0^{s_3} f''''(s_4)\, ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 \\
&= f(0) + x\ f'(0) + \frac{1}{2}x^2\ f''(0) + \int_0^x \int_0^{s_1} s_2 f'''(0)\, ds_2 ds_1 + \int_0^x \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \int_0^{s_3} f''''(s_4)\, ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 \\
&= f(0) + x\ f'(0) + \frac{1}{2}x^2\ f''(0) + \int_0^x \frac{1}{2}(s_2)^2 f'''(0)\, ds_1 + \int_0^x \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \int_0^{s_3} f''''(s_4)\, ds_4 ds_3 ds_2 ds_1 \\
&= f(0) + x\ f'(0) + \frac{1}{2}x^2\ f''(0) + \frac{1}{3.2}x^3 f'''(0) + \int_0^x \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \int_0^{s_3} f''''(s_4)\, ds_4 ds_3 ds_2 ds_1.
\end{aligned}$$

Dit kunnen we voortzetten en na $n$ stappen vinden we

$$f(x) = \underbrace{f(0) + x\ f'(0) + \frac{1}{2}x^2\ f''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}x^n\ f^{(n)}(0)}_{\text{Taylor-polynoom van graad } n \text{ rond } 0} + \underbrace{\int_0^x \int_0^{s_1} \ldots \int_0^{s_n}}_{n+1 \text{ herhaalde integraal}} f^{(n+1)}(s_{n+1})\, ds_{n+1} \ldots ds_2 ds_1. \qquad (5)$$

We herkennen de Taylorpolynoom van $f$ rond 0 van graad $n$ en een restterm in de vorm van een $(n+1)$-voudige integraal. Voor de integraal geldt als $x \geq 0$ wegens (1) dat

$$\begin{aligned}
\int_0^x \int_0^{s_1} \ldots \int_0^{s_n} f^{(n+1)}(s_{n+1})\, ds_{n+1} \ldots ds_2 ds_1 &\leq \int_0^x \int_0^{s_1} \ldots \int_0^{s_n} \text{Max}\ ds_{n+1} \ldots ds_2 ds_1, \\
\int_0^x \int_0^{s_1} \ldots \int_0^{s_n} f^{(n+1)}(s_{n+1})\, ds_{n+1} \ldots ds_2 ds_1 &\geq \int_0^x \int_0^{s_1} \ldots \int_0^{s_n} \text{min}\ ds_{n+1} \ldots ds_2 ds_1.
\end{aligned}$$

Merk op dat

$$\int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_n} \text{Max } ds_{n+1} \dots ds_2 ds_1 =$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Max} \int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-3}} \int_0^{s_{n-2}} \int_0^{s_{n-1}} \int_0^{s_n} 1 \; ds_{n+1} ds_n ds_{n-1} ds_{n-2} \dots ds_2 ds_1 \\
&= \text{Max} \int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-3}} \int_0^{s_{n-2}} \int_0^{s_{n-1}} s_n \; ds_n ds_{n-1} ds_{n-2} \dots ds_2 ds_1 \\
&= \text{Max} \int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-3}} \int_0^{s_{n-2}} \frac{1}{2} (s_{n-1})^2 \; ds_{n-1} ds_{n-2} \dots ds_2 ds_1 \\
&= \text{Max} \int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-3}} \int_0^{s_{n-2}} \frac{1}{3.2} (s_{n-2})^3 \; ds_{n-2} \dots ds_2 ds_1 \\
&= \dots = \text{Max} \int_0^x \frac{1}{n!} (s_1)^n \, ds_1 = \frac{\text{Max}}{(n+1)!} x^{n+1}
\end{aligned}$$

en evenzo

$$\int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_n} \min \; ds_{n+1} \dots ds_2 ds_1 = \frac{\min}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Combineren met (5) levert

$$\begin{aligned}
f(x) - \left( f(0) + x \; f'(0) + \frac{1}{2} x^2 \; f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n \; f^{(n)}(0) \right) &\le \frac{\text{Max}}{(n+1)!} x^{n+1}, \\
f(x) - \left( f(0) + x \; f'(0) + \frac{1}{2} x^2 \; f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n \; f^{(n)}(0) \right) &\ge \frac{\min}{(n+1)!} x^{n+1}.
\end{aligned}$$

Dit geeft de conclusie in de hulpstelling. ■

**Stelling 2** *Als de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $n+1$ maal differentieerbaar is, en zodanig is dat er een getal $M$ is met*

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \le M \text{ voor } -R \le x \le R \tag{6}$$

*dan geldt voor $-R \le x \le R$:*

$$\left| f(x) - \left( f(0) + x f'(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0) \right) \right| \le \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

**Bewijs.** Als $\left| f^{(n+1)}(x) \right| \le M$ dan geldt

$$-M \le f^{(n+1)}(x) \le M.$$

Als $0 \le x \le R$ geldt dan mogen we de hulpstelling gebruiken en vinden

$$\begin{aligned}
f(x) - \left( f(0) + x f'(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0) \right) &\le \frac{M}{(n+1)!} x^{n+1}, \\
f(x) - \left( f(0) + x f'(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0) \right) &\ge \frac{-M}{(n+1)!} x^{n+1}.
\end{aligned}$$

Voor $-R \leq x \leq 0$ moeten we op de mintekens letten in een bewijs als bovenstaand. De formule in (5) geldt nog steeds maar bij het afschatten hebben we twee gevallen te onderscheiden.

Als $n$ is oneven dan geldt voor $-R \leq x \leq 0$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_n} f^{(n+1)}(s_{n+1})\, ds_{n+1} \dots ds_2 ds_1 &\leq \frac{M}{(n+1)!} x^{n+1}, \\
\int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_n} f^{(n+1)}(s_{n+1})\, ds_{n+1} \dots ds_2 ds_1 &\geq \frac{-M}{(n+1)!} x^{n+1}.
\end{aligned}$$

Als $n$ is even dan geldt voor $-R \leq x \leq 0$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_n} f^{(n+1)}(s_{n+1})\, ds_{n+1} \dots ds_2 ds_1 &\geq \frac{M}{(n+1)!} x^{n+1}, \\
\int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_n} f^{(n+1)}(s_{n+1})\, ds_{n+1} \dots ds_2 ds_1 &\leq \frac{-M}{(n+1)!} x^{n+1}.
\end{aligned}$$

In alle gevallen, dat wil zeggen voor $-R \leq x \leq R$, volgt

$$\left| \int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_n} f^{(n+1)}(s_{n+1})\, ds_{n+1} \dots ds_2 ds_1 \right| \leq \left| \frac{M}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

Dit completeert het bewijs omdat

$$f(x) - \left( f(0) + x f'(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0) \right) = \int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_n} f^{(n+1)}(s_{n+1})\, ds_{n+1} \dots ds_2 ds_1.$$

■

In plaats van Taylor rond 0 te bekijken kunnen we ook rond $a$ bekijken. Dan vindt men:

**Stelling 3** *Als de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $n+1$ maal differentieerbaar is, en zodanig is dat er een getal $M$ is met*

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq M \text{ voor } a - R \leq x \leq a + R \tag{7}$$

*dan geldt voor $a - R \leq x \leq a + R$ :*

$$\left| f(x) - \left( f(a) + (x-a) f'(a) + \dots + \frac{1}{n!} (x-a)^n f^{(n)}(a) \right) \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}.$$